Marius Perianu
Ștefan Smărăndoiu
Cătălin Stănică

Matematică

Clasa a VI-a

I

art educațional

Cuprins

Algebră

I. Mulțimi

II. Divizibilitatea numerelor naturale

III. Rapoarte și proporții

Geometrie

IV. Noțiuni geometrice fundamentale

V. Triunghiul

VI. Variante de subiecte pentru teză

I.1 Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

O *mulțime* este o grupare de obiecte, simboluri etc., bine precizate și distincte, numite *elementele* mulțimii.
Mulțimile se notează de regulă cu litere mari: A, B, M, N, ..., iar elementele se notează cu litere mici, simboluri, numere etc.

Mulțimea numerelor naturale

Mulțimea ale cărei elemente sunt toate numerele naturale se numește *mulțimea numerelor naturale*. Se notează $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$.

Mulțimea numerelor naturale nenule

Mulțimea ale cărei elemente sunt toate numerele naturale mai puțin 0 se numește *mulțimea numerelor naturale nenule*. Se notează $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$.

Relații între element și mulțime

Dacă M este o mulțime și x este un element al mulțimii M, se spune că *elementul x aparține mulțimii M* (pe scurt *x aparține lui M*) și se notează $x \in M$.
Dacă x nu este element al mulțimii M, se spune că *x nu aparține mulțimii M* și se notează $x \in M$.

Exemplu: Dacă $M = \{1, 2, 3\}$, avem $1 \in M$, $2 \in M$ și $3 \in M$, dar $0 \notin M$, $5 \notin M$.

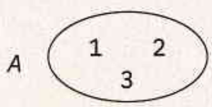
Mulțimea vidă. Mulțimea care nu are niciun element se numește *mulțimea vidă* și se notează $\varnothing$ (de exemplu mulțimea elefanților de pe Lună).

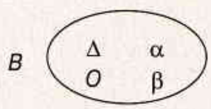
Moduri de definire a mulțimilor

1 Enunțând o proprietate comună a elementelor acelei mulțimi.
Exemple: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $2 \cdot x + 3 \leq 18\}$, $B = \{x \mid x$ este cifră impară$\}$.

2 Prin enumerarea tuturor elementelor ei între acolade.
Exemple: $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{0, 3, 6, 9\}$.

3 Prin enumerarea tuturor elementelor în interiorul unei linii curbe închise (numită diagrama Venn-Euler).
Exemple:





Mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimile cu un număr finit (limitat) de elemente se numesc *mulțimi finite*.
Mulțimile care nu au un număr finit de elemente (spunem că au un număr infinit de elemente) se numesc *mulțimi infinite*.

Exemple:

1 Mulțimea cifrelor din sistemul zecimal este finită.
2 Mulțimea oamenilor de pe globul pământesc este finită.
3 Mulțimea numerelor naturale este infinită.
4 Mulțimea numerelor naturale divizibile cu 7 este infinită.

Cardinalul unei mulțimi finite este numărul elementelor mulțimii. Cardinalul mulțimii finite M este un număr natural care se notează card M.

Observație. Notăm cardinalul unei mulțimi infinite cu simbolul $\mathbb{N}$, pe care îl citim *infinit*. ($\mathbb{N}$ nu este număr natural).

Exemple:

1 Mulțimea $M = \{2, 5, 7, 8\}$ are 4 elemente și scriem: card $M = 4$.

2 card $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}$.

Exersare

1 Scrieți, prin enumerare și sub formă de diagramă, mulțimile literelor folosite în scrierea cuvintelor: *capacitate*, *matematică*, *perspicacitate*, *paralelipiped*.

2 Se dau mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ și $C = \{3, 5, 7, 9\}$. Pentru fiecare dintre elementele 0, 1, 2, 5, 6, 7, scrieți cărei mulțimi aparțin și căreia nu.

3 Este corect scrisă mulțimea $A = \{1 + 2, 2 + 3, 4 + 1, 7, 13\}$? Justificați.

4 Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a $2 \in \{x \mid x$ divide $16\}$;   b $7 \in \{x \mid 2 \le x < 7\}$;   c $21 \notin \{x \mid x = \overline{21c}\}$;

d $4^2 \in \{x \mid 2^3 < x < 2^5\}$;   e $543 \in \{x \mid x \,\vdots\, 5\}$;   f $10^3 \notin \{x \mid x$ se divide cu $10\}$.

5 Determinați valoarea numărului natural x pentru care numărul natural 2 este element al mulțimii $A = \{2 \cdot x + 1, 2 \cdot x + 2, 2 \cdot x + 3\}$.

6 Scrieți următoarele mulțimi, enumerând elementele:

a $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \le 7\}$;   d $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 11 \le x < 23\}$;

b $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 4 \le x \le 9\}$;   e $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 18$ se împarte exact la $x\}$;

c $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 7 < x \le 14\}$;   f $F = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x$ impar, $x < 13\}$.

Reprezentați cele 6 mulțimi utilizând diagrame Venn-Euler.

7 a Scrieți mulțimea numerelor naturale pare mai mici decât 14.

b Scrieți mulțimea numerelor naturale impare mai mici decât 11.

c Scrieți mulțimea numerelor naturale pare, de două cifre, divizibile cu 5.

d Scrieți mulțimea numerelor naturale, mai mici decât 123, divizibile cu 25.

e Scrieți mulțimea numerelor naturale de trei cifre, cu toate cifrele egale.

8 Fie mulțimile $A = \{2, 7, 11, 20\}$, $B = \{x \mid x$ este predecesor al lui m, unde $m \in A\}$, și $C = \{x \mid x$ este succesor al lui m, unde $m \in A\}$. Scrieți prin enumerare, apoi utilizând diagrame Venn-Euler elementele mulțimilor B și C.

9 Stabiliți dacă următoarele mulțimi sunt finite sau infinite:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $x \le 11\}$; $B = \{y \mid y \in \mathbb{N}$ și $2 \cdot y + 1 \ge 37\}$;

$C = \{n \mid n \in \mathbb{N}$ și $2^n < 2^{10}\}$; $D = \{m \mid m \in \mathbb{N}$ și $5^m + 3 > 130\}$.

10 Scrieți mulțimea A știind că are trei elemente și folosind informațiile următoare:
$7 \notin A$, $5 \notin A$, $4 \notin A$, $2 \notin A$, $1 \notin A$, $0 \in A$, $8 \notin A$, $6 \in A$.

11 Precizați mulțimile finite:

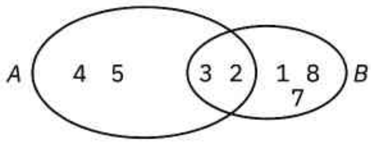
a $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 13 \le x \le 31\}$; **b** $B = \{2^0; 2^2; 2^4; 2^5\}$;

c $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 212\}$; **d** $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ divide } 50\}$;

e $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 \le 100\}$; **f** $F = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 \ge 100\}$.

12 Scrieți elementele mulțimilor $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 5\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 4\}$. Comparați cardinalul lor și reprezentați mulțimile folosind diagrame Venn-Euler.

13 Precizați elementele celor două mulțimi din reprezentarea de mai jos.



Consolidare

14 În locul spațiilor punctate puneți unul dintre semnele $>$ sau $<$ sau $=$, pentru ca următoarele mulțimi să verifice relația scrisă în dreptul fiecăreia:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $2x + 1$ ...... $39\}$ $\text{card}\,A = 19$;

$B = \{n \mid n \in \mathbb{N}$ și $4n$ ...... $56\}$ $\text{card}\,B = 1$;

$C = \{m \mid m \in \mathbb{N}$ și $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$ ...... $m^2\}$ $\text{card}\,C = 6$.

15 Fie mulțimea $A = \{5, 9, 13, 17, ..., 201\}$. Determinați cardinalul mulțimii A și arătați că media aritmetică a elementelor din A nu aparține mulțimii A.

16 Fie mulțimea $A = \{15, 20, 25, ..., 85\}$.

a Scrieți elementele mulțimii A divizibile cu 10.

b Scrieți elementele mulțimii A divizibile cu 2.

c Determinați numărul de elemente al mulțimii A.

17 Scrieți mulțimea $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2x + 7 \le 20\}$ prin enumerarea tuturor elementelor.

Rezolvă problema chiar aici:

18 Câte elemente are mulțimea $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $7x + 3 = x + 28\}$?

19 Determinați numărul natural n știind că $11 \in \{3x + 5, 2n + 4\}$.

20 **a** Determinați $a \in \mathbb{N}$, astfel încât cardinalul mulțimii $\{a, 2a + 5, 3a + 1\}$ să fie 2.

b Determinați $a \in \mathbb{N}$, pentru care $\text{card}\{a, 3a, a + 1\} = 2$.

c Determinați $a \in \mathbb{N}$, astfel încât cardinalul mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \cdot x + a < 9\}$ să fie un element al mulțimii $\{4, 5\}$.

21 Aflați cardinalul mulțimii: $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}$, n se scrie numai cu cifra 3 și $n < 401\}$.

22 Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a $2 \in \{1, 2, 3\}$;
b $2 \notin \{3, 4\}$;
c $2 \in \{12, 122, 1222\}$;
d $\{1, 2, 3, 4\}$ conține 3 pătrate perfecte;
e $\text{card}\{2, 3\} < \text{card}\{0, 1, 2\}$;
f $15 \notin \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 3 \cdot k, k \in \mathbb{N}\}$.

23 Scrieți în 3 moduri diferite mulțimile:
a mulțimea numerelor naturale impare cuprinse între 17 și 28.
b mulțimea numerelor naturale, mai mici decât 38, divizibile cu 3.
c mulțimea pătratelor perfecte mai mici decât 225 și mai mari decât 100.
d mulțimea tuturor cuburilor perfecte cuprinse între 7 și 130.

24 Scrieți mulțimea $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ punând în evidență o proprietate comună a elementelor sale.

25 Aflați elementele comune mulțimilor $A = \{13, 14, 15, ..., 73\}$ și $B = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} = \overline{ba}\}$.

26 Fie $A = \{x \mid x = u(n^2), n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y \in \mathbb{N}, y \,\vdots\, 2\}$. Determinați elementele comune celor două mulțimi.

27 Enumerați elementele mulțimilor:

a $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 10 < 3^x \leq 81\}$;
b $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 16 \leq x^2 \leq 625\}$;
c $C = \{x = \overline{abc} \mid 80 < x < 600\}$;
d $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 7 \cdot k + 1, k \in \mathbb{N}, k \leq 7\}$;
e $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 13 < 3x - 5 \leq 22\}$;
f $F = \{a = \overline{xy} \mid \overline{xy} \,\vdots\, 2, x \,\vdots\, 5\}$;
g $G = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 5^x = 125 \text{ sau } 2^x = 1\}$;
h $H = \{x \mid x = 3^n, n \leq 4, n \in \mathbb{N}\}$.

28 **a** Se dau mulțimile $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{x \mid x = 7a + 2 \text{ și } a \in A\}$.
Determinați elementele mulțimii B.

b Se dau mulțimile $A = \{x \mid 25^{10} < 5^x \leq 125^8\}$ și $B = \{y \mid y = 3 \cdot x - 11 \text{ și } x \in A\}$. Determinați elementele mulțimilor A și B.

29 Scrieți următoarele mulțimi cu ajutorul unei proprietăți caracteristice:

a $A = \{p, i, c, o, r\}$;
b $B = \{1, 6, 11, ..., 501\}$;
c $C = \{1, 3, 6, 10, ..., 210\}$;
d $D = \{1, 2, 6, 24, 120, 720\}$;
e $E = \{1, 3, 7, 15, 31, 63\}$;
f $F = \{0, 1, 8, 81, 1024\}$;
g $G = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$;
h $H = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36\}$.

30 Fie $A = \{0, 2, 4, 6\}$. Determinați elementele mulțimii $B = \{x \mid x = 3^a - 2^a, a \in A\}$.

31 Scrieți mulțimea A de numere naturale care sunt mai mici decât 71 și care împărțite la 10 dau restul mai mare decât 8.

Rezolvă problema chiar aici:

32 Fie n un număr natural. Considerăm mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^n \leq x \leq 2^{n+2}\}$.
a Determinați cardinalul mulțimii A.
b Determinați numărul n, știind că A are 97 de elemente.

Aprofundare

33 Numerele naturale impare consecutive sunt grupate astfel: $\{1\}, \{3, 5\}, \{7, 9, 11\}, \{13, 15, 17, 19\}, \ldots$ etc. Determinați suma numerelor din a 8-a mulțime.

34 Fie $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2012\}$. Aflați card$\{x \in A \mid x \,\vdots\, 2$ *sau* $x \,\vdots\, 5\}$.

35 Se dă șirul de mulțimi $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2, 3, 4\}$, $A_3 = \{5, 6, 7, 8, 9\}, \ldots$.
a Scrieți elementele mulțimii A_4.

b Determinați mulțimea ce conține numărul natural 2010.

c Determinați cel mai mic și cel mai mare element al mulțimii A_{2010}.

36 Fie mulțimea $A = \{2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \mid a, b, c \in \mathbb{N}\}$. Arătați că printre oricare 9 elemente ale lui A există cel puțin două al căror produs este pătrat perfect.

Probleme de șapte stele

37 Se dă mulțimea A, formată din numere naturale, cu proprietățile:
a dacă $x \in A$, atunci $5 \cdot x + 1 \in A$;

b dacă $7 \cdot x + 4 \in A$, atunci $x \in A$;

c $9 \in A$.

Arătați că numărul 6 aparține mulțimii A.

38 Determinați mulțimile A și B care îndeplinesc simultan următoarele proprietăți:
a mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$ este formată din toate elementele mulțimilor A și B;

b fiecare mulțime are câte două elemente;

c dacă $x \in A$, atunci $x + 1 \in B$.

39 Se dă mulțimea A, formată din numere naturale, cu proprietățile:
a dacă $x \in A$, atunci $3x + 2 \in A$;

b dacă $x^2 + 1 \in A$, atunci $x \in A$;

c $1 \in A$.

Arătați că numerele 4, 5 și 26 aparțin mulțimii A.

40 Se dă mulțimea A, formată din numere naturale, cu proprietățile:
a dacă $x \in A$, atunci $3 \cdot x \in A$ și $6 \cdot x + 4 \in A$;

b dacă $4 \cdot x + 2 \in A$, atunci $x \in A$;

c $11 \in A$.

Arătați că $2010 \in A$.

I.2 Relații între mulțimi. Submulțimi

Egalitatea. Două mulțimi A și B sunt egale, dacă sunt formate din aceleași elemente. Se notează $A = B$.
În acest caz, orice element care aparține lui A este și element al lui B și reciproc, orice element al lui B aparține și mulțimii A.
Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu aparține lui B sau invers, se spune că mulțimile A și B sunt diferite. Se notează $A \neq B$.

Exemplu: Fie $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 3\}$, $C = \{2, 3, 4\}$. Avem $A = B$ și $A \neq C$.

Incluziunea. Mulțimea A este inclusă în mulțimea B și se notează $A \subset B$, dacă orice element al mulțimii A aparține mulțimii B.
Se mai spune și că mulțimea B *include* mulțimea A și se notează $B \supset A$.
Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu este și element al lui B, se spune că mulțimea A *nu este inclusă* în mulțimea B și se folosește notația $A \not\subset B$, sau, echivalent, se spune că B *nu include* pe A și se notează $B \not\supset A$.

Exemplu:
Fie $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{1, 2, 3, 5\}$.
Atunci $A \subset C$, $B \subset C$, $C \supset A$, $C \supset B$, $A \not\subset B$, $C \not\subset A$, $C \not\subset B$, $B \not\subset A$.

Observații:
1 Mulțimea vidă este inclusă în orice mulțime: $\varnothing \subset A$.
2 Orice mulțime este inclusă în ea însăși: $A \subset A$.
3 Dacă A și B sunt două mulțimi, astfel încât $A \subset B$ și $B \subset A$, atunci $A = B$.
4 Dacă A, B și C sunt trei mulțimi, astfel încât $A \subset B$ și $B \subset C$, atunci $A \subset C$.
Proprietățile 2, 3 și 4 exprimă faptul că relația de incluziune a mulțimilor este *reflexivă*, *antisimetrică* și respectiv *tranzitivă*.
Proprietatea 3 se folosește pentru a demonstra egalitatea a două mulțimi A și B prin *dublă incluziune* (sau *incluziune reciprocă*). Dacă $A \subset B$ și $B \subset A$ atunci $A = B$.

Submulțimi. Dacă mulțimea A este inclusă în mulțimea B, adică $A \subset B$, se spune că mulțimea A este o *submulțime* a mulțimii B.

Exemplu: Mulțimile $U = \{1, 2\}$ și $V = \{1, 3, 5\}$ sunt submulțimi ale lui $M = \{1, 2, 3, 5\}$.

Observații:
1 Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi.
2 Numărul submulțimilor unei mulțimi A este egal cu $2^{\text{card}A}$.
3 Mulțimea submulțimilor (părților) lui A se notează cu $\mathcal{P}(A)$.

Exemplu: Mulțimea $A = \{1, 2, 3\}$ are $2^3 = 8$ submulțimi: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ și A.

Exersare

1 Se dau mulțimile: $A = \{1\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{1, 2, 3\}$ și $D = \{1, 2, 3, 4\}$. Scrieți, pentru fiecare două mulțimi, dacă una este inclusă în cealaltă sau nu.

2 Stabiliți dacă mulțimile A și B sunt egale, știind că $A = \{2, 4, 6, 9\}$, iar $B = \{2, 3, 6, 9\}$.

3 Fie mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 1\}$, $C = \{2, 5, 8\}$, $D = \{1, 4, 2\}$, $E = \{3, 2, 1\}$, $F = \{8, 5, 2\}$, $G = \{4, 1, 2\}$, $H = \{5, 2, 8\}$. Scrieți perechile de mulțimi egale.

4 Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a $2 \in \{1, 2, 3\}$; b $2 \notin \{3, 4\}$; c $\{2\} \subset \{2, 3\}$; d $\varnothing = \{0\}$;
e $\varnothing \subset \{1, 2\}$; f $A \subset A$; g $\{2, 3\} \not\subset \{1, 2, 4\}$.

5 Câte submulțimi are mulțimea $A = \{2, 4, 6, 8\}$?

6 Găsiți numărul natural n pentru care $\{3n + 1, n + 4\} = \{6, 7\}$.

7 Scrieți toate submulțimile mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$:

a care nu conțin pe 3;
b care nu conțin nici pe 1, nici pe 5;
c care conțin pe 5;
d care conțin pe 2, dar nu conțin pe 3;
e care conțin pe 1, 2 și 3;
f care conțin pe 1 și 2, dar nu conțin pe 4.

Rezolvă problema chiar aici:

8 Câte numere pare conține mulțimea $P = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ și } 2^4 < n < 3^3\}$?

Consolidare

9 Știind că mulțimea A are 32 de submulțimi, aflați numărul elementelor mulțimii A.

10 Determinați valorile numerelor naturale x, y, z, t pentru care:

a mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{2x + 1, 2x, x\}$ sunt egale;

b mulțimile $A = \{5, 7, 9, 12\}$ și $B = \{4x + 1, 4x + 3, 4y + 1, 4z\}$ sunt egale;

c mulțimile $A = \{3, 7, 11, 15\}$ și $B = \{3x, x - 2, x + 2, 2x + 1\}$ sunt egale;

d mulțimile $A = \{4, 15, 25\}$ și $B = \{t^2, 3t, t - 1\}$ sunt egale.

11 Scrieți o submulțime formată din 4 elemente ale mulțimii numerelor naturale care împărțite la 7 dau restul 3.

12 Determinați mulțimile A, astfel încât $\{1, 2, 3\} \subset A \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Rezolvă problema chiar aici:

13 Determinați cardinalul mulțimii $A = \{2^{x+5}, 4^{x+1}, 8^{x+1} \mid x \in \mathbb{N}\}$.

14 Verificați, în fiecare caz, dacă mulțimile A și B sunt egale, unde:

a $A = \{x \mid x \text{ divide } 16, x \in \mathbb{N}\}$; $B = \{x \mid x = 2^n, 0 \leq n \leq 4\}$;

b $A = \{x \mid 7 < x < 40, x \in \mathbb{N}\}$; $B = \{y \mid 40 \leq 5 \cdot y < 201, y \in \mathbb{N}\}$;

c $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (10^2)^{10x} : (10^3 \cdot 10^6 \cdot 10^9)^x = 10\,000\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 2x + 3x + ... + 10x = 110\}$.

Rezolvă problema chiar aici:

15 Se consideră mulțimile $M = \{14, 4a, 2b + 1\}$ și $P = \{20, 2b, 15\}$. Determinați numerele naturale a și b pentru care mulțimile M și P sunt egale.

16 Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x^3 \leq 124\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N}^* \mid y = x^2 - 1, x \in A\}$. Determinați elementele celor două mulțimi și precizați câte submulțimi are mulțimea B.

17 Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x < 10\}$ și $C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a $\{0, 1, 2, 3\} \subset A$;
b $A \subset B$;
c $C \subset \{x \in \mathbb{N} \mid x \,\vdots\, 3\}$;
d $\{6, 9, 12\} \subset C$;
e $B \subset C$;
f $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 32 \leq 2^x < 1024\}$;
g $\text{card}\, B = 9$;
h $\varnothing \subset C$;
i $A \subset \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq 2x + 1 \leq 13\}$.

18 Determinați numerele naturale x și y, astfel încât mulțimile: $A = \{2^x, 2^{x-y}, 2^{2+y}\}$ și $B = \{2^{x-2}, 2^{4-x}, 2^{x+y}\}$ să fie egale.

19 O mulțime A conține 21 elemente din mulțimea $\mathbb{N}$ și 20 elemente din mulțimea $\mathbb{N}^*$. Putem preciza un element al mulțimii A? Justificați răspunsul.

Aprofundare

20 Fie o mulțime formată din 10 numere naturale. Arătați *că* există o submulțime a sa cu suma elementelor divizibilă cu 10.

21 Fie $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$.

a Determinați numărul submulțimilor lui A, cu proprietatea că produsul elementelor fiecăreia este cel mult 15.

b Determinați numărul submulțimilor lui A cu trei elemente $\{a, b, c\}$ astfel încât $a + b = 2 \cdot c$.

Rezolvă problema chiar aici:

22 Fie $A = \{1, 2, 3, ..., 100\}$. Determinați numărul mulțimilor $B \subset A$, astfel încât $\{1, 2\} \subset B$.

Probleme de șapte stele

23 Se consideră mulțimea $A = \{5, 10, 15, ..., 2010\}$. Construim șirul de submulțimi ale mulțimii A. $A_1 = \{5, 10\}$, $A_2 = \{15, 20, 25\}$, $A_3 = \{30, 35, 40, 45\}$, ...

a Scrieți mulțimile A_{12} și A_{34}.

b Calculați suma elementelor mulțimii A_{97}.

24 Se consideră mulțimea $A = \{1, 3, 5, ..., 101\}$.

a Aflați numărul perechilor (a, b), $a, b \in A$, $a < b$, astfel încât $a + b = 100$.

b Dacă suma a 46 de elemente ale mulțimii A este 2010, atunci arătați că cel puțin două elemente sunt egale.

25 Se dă mulțimea $A = \{1, 2, 3, ..., 2010\}$.

a Determinați numărul submulțimilor mulțimii A formate din două elemente cu suma egală cu 2011.

b Determinați numărul submulțimilor mulțimii A formate din patru elemente, astfel încât suma a două elemente să fie egală cu suma celorlalte două elemente și să fie egală cu 2011.

Testul 1

(1p) **1** Scrieți toate submulțimile mulțimii $A = \{1, 4, 9\}$.

(1p) **2** **a** Determinați valorile lui x pentru care mulțimea $\{x, 3\}$ este o submulțime a mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b Câte elemente are mulțimea multiplilor lui 15 mai mici decât 400?

(2p) **3** **a** Determinați cardinalul mulțimii $\{13, 15, 17, ..., 79\}$.

b Determinați cardinalul mulțimii divizorilor numărului 2^5.

(2p) **4** **a** Aflați numărul maxim de mulțimi diferite ce se formează cu numerele 1, 2, 3.

b Se dă mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Determinați numărul submulțimilor de două elemente ale mulțimii A, astfel încât suma elementelor fiecăreia să fie un număr par.

(1p) **5** Aflați mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 2x + 4 \leq 12\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid 2^3 < 3^y < 2^7\}$.

(2p) **6** Fie mulțimile $A = \{x \mid x = 5 \cdot n + 7, n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = n^2, n \in \mathbb{N}\}$.
Determinați elementele mulțimilor $C = \{x \in A \mid x < 30\}$ și $D = \{y \in B \mid 30 < y < 100\}$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(1p) **1** **a** Determinați mulțimea divizorilor numărului 75.

b Determinați mulțimea multiplilor lui 20, mai mici decât 150.

(1p) **2** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a $15 \in \{0, 5, 10, ..., 100\}$; **b** $\{1, 2, 3\} \not\subset \mathbb{N}$;

c $\mathbb{N}^* \subset \{1, 2, 3, ..., 2011\}$; **d** $\varnothing \in \mathbb{N}$.

(2p) **3** **a** Determinați elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x + 2) \vdots 5, x = \overline{ab}\}$.

b Determinați elementele mulțimilor:
$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2k + 3, 1 \leq k \leq 5\}$ și $B = \{y \mid y \in \mathbb{N}, 5^3 - 4 \leq y \leq 2^7 - 1\}$.

(2p) **4** Fie $A = \{1, 2, 3, ..., 99, 100\}$. Determinați numărul submulțimilor $B \subset A$, știind că $\{1, 2\} \subset B \subset \{1, 2, ..., 81\}$.

(2p) **5** Determinați suma elementelor mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 2^{100}\}$.

(1p) **6** Se dă mulțimea A cu proprietățile:

a dacă $x \in A$, atunci $3x + 2 \in A$; **b** dacă $3x + 1 \in A$ atunci $x \in A$; **c** $19 \in A$.

Arătați că numărul 1700 aparține mulțimii A.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.